POLITECNICO DI MILANO

Meccanica dei Fluidi

1. Introduzione

A cura di: Dalila Vescovi, Diego Berzi

v2.9

Indice

1 Richiami di analisi tensoriale

1.1 Campi scalari, vettoriali e tensoriali

Consideriamo un sistema di coordinate spaziali cartesiane ortogonali. Le grandezze che verranno prese in considerazione possono essere campi scalari, vettoriali o tensoriali.

Campo scalare

Un campo scalare è una funzione che varia nello spazio (il generico punto nello spazio è individuato dalle coordinate x, y e z) e nel tempo, t, e il cui argomento è uno scalare:

$$a = a(x, y, z, t).$$

Campo vettoriale

Un campo vettoriale è una funzione che varia nello spazio e nel tempo e il cui argomento è un vettore:

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(x, y, z, t).$$

Nel sistema di riferimento cartesiano, un vettore può essere rappresentato mediante le sue componenti scalari lungo i tre assi (Fig. 1)

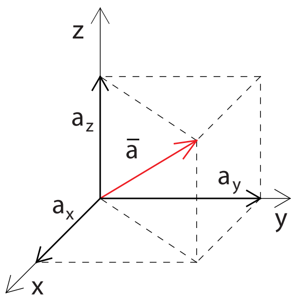


Figura 1: vettore nel piano cartesiano.

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)\,.$$

La terna di riferimento x, y, z può, equivalentemente, essere rappresentata come x_1, x_2, x_3, per cui il vettore $\bar{\mathbf{a}}$ può anche essere espresso come:

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)\,.$$

Introducendo i versori (vettori aventi modulo unitario; si veda più avanti per la definizione di modulo) dei tre assi:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{i}} &= (1,0,0) \quad \text{versore dell'asse } x,\\
\hat{\mathbf{j}} &= (0,1,0) \quad \text{versore dell'asse } y,\\
\hat{\mathbf{k}} &= (0,0,1) \quad \text{versore dell'asse } z,
\end{aligned}
$$

il generico vettore $\overline{\mathbf{a}}$ può essere espresso anche come

$$\overline{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}},$$

o anche

$$\overline{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}.$$

Per comodità e brevità di scrittura è opportuno introdurre la **notazione indiciale**. Secondo questa convenzione, gli enti matematici vengono rappresentati con dei pedici che prendono il nome di indici. Utilizzando la notazione indiciale, la generica componente del vettore $\overline{\mathbf{a}}$ viene indicata come a_i, dove i è l'indice e può assumere i valori $1, 2$ e 3 (o, in modo del tutto equivalente, x, y e z). In notazione indiciale si adotta la convenzione secondo la quale i termini con indici ripetuti si intendono sommati (convenzione di Einstein), per cui, per esempio:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Anche i versori dei tre assi vengono espressi con tale notazione come $\hat{\mathbf{i}}_i$, con $i = 1, 2, 3$, dove evidentemente $\hat{\mathbf{i}}_1 = \hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{i}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{i}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$. Allora la scrittura compatta a_i esprime la componente scalare di $\overline{\mathbf{a}}$ nella direzione $\hat{\mathbf{i}}_i$, e il vettore $\overline{\mathbf{a}}$ è definito come

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{a}} &= a_i\hat{\mathbf{i}}_i \\
&= \sum_{i=1}^{3} a_i\hat{\mathbf{i}}_i = a_1\hat{\mathbf{i}}_1 + a_2\hat{\mathbf{i}}_2 + a_3\hat{\mathbf{i}}_3 \\
&= a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}
$$

Tornando alla definizione di vettore, questo è definito da direzione, modulo e verso. Il **modulo** di un vettore $\overline{\mathbf{a}}$ rappresenta la sua lunghezza ed è dato da

$$
\begin{aligned}
|\overline{\mathbf{a}}| = a &= \sqrt{a_i a_i} \\
&= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.
\end{aligned}
$$

La **direzione** è individuata dalla retta su cui giace il vettore. Consideriamo per comodità il caso piano di Fig. 2. In questo caso

$$\alpha = \arctan \frac{a_y}{a_x}$$

è l'angolo che la direzione del vettore $\overline{\mathbf{a}}$ forma con il semiasse positivo delle ascisse.

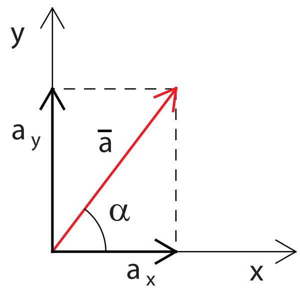


Figura 2: direzione di un vettore.

Il **verso** rappresenta l'orientamento del vettore e dipende dal segno delle sue componenti. Se la componente a_x è positiva, ad esempio, allora $\overline{\mathbf{a}}$ ha verso concorde con l'asse x.

Dato un campo vettoriale $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}(x, y, z, t)$, tutte le sue componenti sono funzioni scalari che variano nello spazio e nel tempo (campi scalari):

$$\overline{\mathbf{a}} = a_x(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Viceversa, una terna di campi scalari (a_x, a_y, a_z) rappresenta le componenti scalari di un campo vettoriale solo se alla direzione individuata dal versore $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}} + n_z\hat{\mathbf{k}}$ è associata la componente scalare

$$\begin{aligned} a_n &= n_i a_i \\ &= n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z. \end{aligned}$$

Campo tensoriale

Un campo tensoriale è una funzione che varia nello spazio e nel tempo e il cui argomento è un tensore:

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{\overline{\mathbf{a}}}(x, y, z, t).$$

In generale un tensore di ordine n è un ente matematico descritto da 3^n componenti. Quindi un tensore di ordine 0 è rappresentato da $3^0 = 1$ componenti, cioè è uno scalare; un tensore di ordine 1 è rappresentato da $3^1 = 3$ componenti, cioè è un vettore; un tensore di ordine 2 (che è quello che ci interessa nell'ambito di questo corso) è rappresentato da $3^2 = 9$ componenti, ovvero è una matrice 3×3. In questa dispensa, con il termine tensore si farà riferimento sempre ad un tensore di ordine 2. Per cui, il generico tensore $\overline{\overline{\mathbf{a}}}$ viene rappresentato come

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}.$$

Il generico elemento del tensore $\bar{\bar{\mathbf{a}}}$ viene espresso in notazione indiciale come a_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$ (o anche $i, j = x, y, z$).

Dato un campo tensoriale $\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \bar{\bar{\mathbf{a}}}(x, y, z, t)$, allora tutte le sue componenti sono funzioni scalari che variano nello spazio e nel tempo. Inoltre, le tre righe della matrice rappresentano le tre componenti (campi) vettoriali $\overline{\mathbf{a}}_x, \overline{\mathbf{a}}_y, \overline{\mathbf{a}}_z$ del campo tensoriale $\bar{\bar{\mathbf{a}}}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}}_i &= a_{ij}\hat{\mathbf{i}}_j \\ &= (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}) \,. \end{aligned}$$

Viceversa, una terna di campi vettoriali $\overline{\mathbf{a}}_x, \overline{\mathbf{a}}_y, \overline{\mathbf{a}}_z$ definisce le componenti vettoriali di un campo tensoriale solo se alla direzione individuata dal versore $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}} + n_z\hat{\mathbf{k}}$ è associato il vettore

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}}_n &= n_i\overline{\mathbf{a}}_i \\ &= n_x\overline{\mathbf{a}}_x + n_y\overline{\mathbf{a}}_y + n_z\overline{\mathbf{a}}_z. \end{aligned}$$

1.2 Operazioni tra vettori e tensori

Prodotto scalare tra due vettori

Il prodotto scalare di due vettori, $\overline{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\overline{\mathbf{b}} = (b_x, b_y, b_z)$, indicato con $\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}}$, è lo <u>scalare</u> definito da

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} &= a_i b_i \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Il prodotto scalare soddisfa le seguenti proprietà:

- $\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} \cdot \overline{\mathbf{a}}$ (simmetria);
- $\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}} = 0 \iff \overline{\mathbf{a}} \perp \overline{\mathbf{b}}$ (il prodotto scalare è nullo se i vettori sono ortogonali);
- $\overline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i = a_i$.

Il prodotto scalare di un vettore per sé stesso,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{a}} &= a_i a_i \\ &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2, \end{aligned}$$

risulta pari al quadrato del modulo del vettore stesso.

Prodotto misto tra un vettore e un tensore

Il prodotto misto tra un vettore, $\overline{\mathbf{a}}$, e un tensore, $\overline{\overline{\mathbf{b}}}$, indicato con $\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}}$, è il <u>vettore</u> definito da

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}} &= \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \\ &= a_i b_{ij} \hat{\mathbf{i}}_j \\ &= (a_x b_{xx} + a_y b_{yx} + a_z b_{zx})\,\hat{\mathbf{i}} + (a_x b_{xy} + a_y b_{yy} + a_z b_{zy})\,\hat{\mathbf{j}} + \\ &\quad + (a_x b_{xz} + a_y b_{yz} + a_z b_{zz})\,\hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Prodotto vettoriale tra due vettori

Il prodotto vettoriale di due vettori, $\overline{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\overline{\mathbf{b}} = (b_x, b_y, b_z)$, indicato con $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$, è il <u>vettore</u> definito da

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

dove $|\cdot|$ denota il determinante della matrice.

Prodotto tensoriale tra due vettori

Il prodotto tensoriale di due vettori, $\overline{\mathbf{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\overline{\mathbf{b}} = (b_x, b_y, b_z)$, indicato semplicemente con $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$, è il tensore definito da

$$\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}.$$

Il generico elemento ij-esimo di $\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}$ si denota come

$$\left(\overline{\mathbf{a}}\overline{\mathbf{b}}\right)_{ij} = a_i b_j.$$

Prodotto di Hadamard tra due tensori

Il prodotto di Hadamard tra due tensori, $\overline{\overline{\mathbf{a}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{b}}}$, indicato semplicemente con $\overline{\overline{\mathbf{a}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{b}}}$, è il tensore definito da

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{b}}} = \begin{bmatrix} a_{xx}b_{xx} & a_{xy}b_{xy} & a_{xz}b_{xz} \\ a_{yx}b_{yx} & a_{yy}b_{yy} & a_{yz}b_{yz} \\ a_{zx}b_{zx} & a_{zy}b_{zy} & a_{zz}b_{zz} \end{bmatrix}.$$

Il generico elemento ij-esimo di $\overline{\overline{\mathbf{a}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{b}}}$ si denota come

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{a}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{b}}}\right)_{ij} = a_{ij} b_{ij}.$$

Prodotto matriciale tra due tensori

Il prodotto matriciale tra due tensori, $\overline{\overline{\mathbf{a}}}$ e $\overline{\overline{\mathbf{b}}}$, indicato con $\overline{\overline{\mathbf{a}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}}$, è il tensore definito da

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix}.$$

Il generico elemento ij-esimo di $\overline{\overline{\mathbf{a}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}}$ si denota come

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{a}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{b}}}\right)_{ij} = a_{ik} b_{kj}.$$

1.3 Operatore nabla

L'operatore differenziale vettoriale nabla, ∇, è definito come un vettore che ha per componenti gli operatori di derivata parziale lungo le tre direzioni:

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\mathbf{i}}_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

L'operatore nabla consente di scrivere in forma compatta alcuni operatori differenziali, quali il gradiente, la divergenza e il rotore.

Gradiente di un campo scalare

Dato un campo scalare $a = a(x, y, z, t)$ continuo e differenziabile nello spazio, si definisce gradiente di a il seguente campo vettoriale

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(a) = \nabla a &= \frac{\partial a}{\partial x_i}\hat{\mathbf{i}}_i \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial a}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial a}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

In notazione indiciale la generica componente scalare di ∇a si denota come

$$(\nabla a)_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}.$$

Vale la pena notare che il gradiente di una coordinata spaziale n misurata lungo una direzione identificata dal generico versore $\hat{\mathbf{n}}$, è uguale al versore stesso:

$$\nabla n = \frac{\partial n}{\partial x_i}\hat{\mathbf{i}}_i = n_i\hat{\mathbf{i}}_i = \hat{\mathbf{n}},$$

dove n_i è la componente di $\hat{\mathbf{n}}$ lungo la direzione di $\hat{\mathbf{i}}_i$.

Gradiente di un campo vettoriale

Dato un campo vettoriale $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}(x, y, z, t)$ continuo e differenziabile nello spazio, si definisce gradiente di $\overline{\mathbf{a}}$ il seguente campo <u>tensoriale</u>

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\overline{\mathbf{a}}) = \nabla\overline{\mathbf{a}} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & \dfrac{\partial a_y}{\partial x} & \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial y} & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} & \dfrac{\partial a_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} & \dfrac{\partial a_y}{\partial z} & \dfrac{\partial a_z}{\partial z} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La generica componente scalare di $\nabla\overline{\mathbf{a}}$ si denota come

$$(\nabla\overline{\mathbf{a}})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Divergenza di un campo vettoriale

Dato un campo vettoriale $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}(x, y, z, t)$ continuo e differenziabile nello spazio, si definisce divergenza di $\overline{\mathbf{a}}$ il seguente campo <u>scalare</u>

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\overline{\mathbf{a}}) = \nabla \cdot \overline{\mathbf{a}} &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Si noti che il punto $\cdot$ rappresenta l'operazione di prodotto scalare tra il vettore nabla e il vettore $\overline{\mathbf{a}}$.

Un caso particolare è costituito dalla divergenza del gradiente di uno scalare a:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad}(a)) = \nabla \cdot \nabla a &= \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} \\
&= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \nabla^2 a,
\end{aligned}$$

dove l'operatore ∇^2 (a volte indicato con Δ) prende il nome di Laplaciano.

Divergenza di un campo tensoriale

Dato un campo tensoriale $\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \bar{\bar{\mathbf{a}}}(x, y, z, t)$ continuo e differenziabile nello spazio, si definisce divergenza di $\bar{\bar{\mathbf{a}}}$ il seguente campo <u>vettoriale</u>

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\bar{\bar{\mathbf{a}}}\right) = \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{a}}} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_j \\
&= \left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zx}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial a_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \\
&+ \left(\frac{\partial a_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}
$$

La generica componente scalare di $\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{a}}}$ si denota come

$$
\left(\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{a}}}\right)_j = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}.
$$

Un caso particolare è costituito dalla divergenza del gradiente di un vettore $\bar{\mathbf{a}}$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(\bar{\mathbf{a}}\right)\right) = \nabla \cdot \nabla \bar{\mathbf{a}} &= \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_j \\
&= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{j}} + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{k}} = \nabla^2 \bar{\mathbf{a}},
\end{aligned}
$$

dove ∇^2 è il Laplaciano.

Rotore di un campo vettoriale

Dato un campo vettoriale $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(x, y, z, t)$ continuo e differenziabile nello spazio, si definisce rotore di $\bar{\mathbf{a}}$ il seguente campo <u>vettoriale</u>

$$
\operatorname{rot}\left(\bar{\mathbf{a}}\right) = \nabla \times \bar{\mathbf{a}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.
$$

Il simbolo $\times$ denota il prodotto vettoriale tra il vettore nabla e il vettore $\bar{\mathbf{a}}$.

1.4 Teoremi

Siano W una regione generica (un volume) delimitata dalla sua frontiera A (superficie che racchiude il volume W), e $\hat{\mathbf{n}}$ il versore entrante a A. Siano inoltre $\overline{\mathbf{a}}$ e a un campo vettoriale e un campo scalare, rispettivamente, continui e differenziabili. Allora valgono i seguenti teoremi.

teorema della divergenza

$$\int_W \nabla \cdot \overline{\mathbf{a}} \; dW = \int_W \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \; dW = -\int_A a_i n_i \; dA = -\int_A \overline{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \; dA;$$

teorema del gradiente

$$\int_W \nabla a \; dW = \int_W \frac{\partial a}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_i \; dW = -\int_A a \; n_i \hat{\mathbf{i}}_i \; dA = -\int_A a \hat{\mathbf{n}} \; dA.$$

1.5 Momento meccanico

Si definisce momento meccanico di una forza $\overline{\mathbf{F}}$ rispetto al generico polo O il vettore

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{b}} \times \overline{\mathbf{F}},$$

in cui $\overline{\mathbf{b}}$ rappresenta il vettore posizione di qualsiasi punto giacente sulla retta di applicazione di $\overline{\mathbf{F}}$ rispetto al polo stesso.

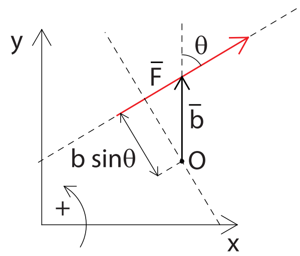


Figura 3: Momento meccanico.

Considerando per semplicità il caso piano (dove cioè $\overline{\mathbf{F}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$ sono complanari e giacciono sul piano $x-y$), Fig. 3, allora:

$$\overline{\mathbf{M}} = (0, 0, M_z) = M_z\hat{\mathbf{k}}$$

dove

$$M_z = \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \left|\overline{\mathbf{F}}\right| \sin\theta,$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori. $\overline{\mathbf{M}}$ è dunque diretto lungo l'asse z (ovvero è ortogonale al piano su cui giacciono i vettori $\overline{\mathbf{F}}$ e $\overline{\mathbf{b}}$), e $\left|\overline{\mathbf{b}}\right| \sin\theta$ rappresenta il braccio di $\overline{\mathbf{F}}$ rispetto al polo O ed è pari alla distanza tra O e la retta di applicazione di $\overline{\mathbf{F}}$. Inoltre, fissata una convenzione per le rotazioni positive (in figura si sono assunte positive le rotazioni antiorarie), il segno di M_z è positivo se la rotazione generata dal vettore rispetto al polo è concorde con la convenzione scelta, negativo altrimenti. Per esempio, con riferimento alla Fig. 3, M_z è negativo, quindi $\overline{\mathbf{M}}$ è discorde con l'asse z.

2 Proprietà dei fluidi

2.1 Grandezze fondamentali e unità di misura

Le unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale (SI) sono sette. Di queste, solo le cinque indicate in Tabella 1 verranno utilizzate in questa dispensa (tralasciando l'intensità di corrente e l'intensità luminosa).

Tabella 1: Grandezze fondamentali e unità di misura nel sistema internazionale.

Grandezza fondamentale		Unità di di misura
Lunghezza	$[L]$	m
Tempo	$[t]$	s
Massa	$[M]$	kg
Temperatura termodinamica	$[T]$	K
Quantità di sostanza	$[n]$	mol

Si definiscono grandezze **geometriche** quelle la cui unità di misura è data dalla potenza della lunghezza (ad esempio, area e volume, le cui unità di misura sono rispettivamente $[L^2]$ e $[L^3]$). Si definiscono grandezze **cinematiche** quelle la cui unità di misura è data dal produttorio di potenze di lunghezza e tempo (ne è un esempio la velocità, la cui unità di misura è $[L][t^{-1}]$). Si definiscono grandezze **dinamiche** quelle la cui unità di misura è data dal produttorio di potenze di lunghezza, tempo e massa (ad esempio la forza, la cui unità di misura è $[M][L][t^{-2}]$).

2.2 Fluido come mezzo continuo

In Meccanica dei Fluidi, il fluido viene trattato come un mezzo continuo, cioè come un mezzo in cui non è possibile scorgere vacanze. Dal punto di vista matematico, questo significa che in ogni punto del mezzo è possibile definire le grandezze mediante funzioni continue e differenziabili.

Dato un volume finito di fluido, si distinguono due tipi di forze esterne agenti sul volume:

- forze di volume $\overline{\mathbf{F}}_v$: proporzionali al volume di fluido (per esempio la forza di gravità). Dal momento che il volume e la massa sono legati attraverso la densità (si veda il Par. 2.3), sono anche proporzionali alla massa del fluido e possono essere equivalentemente definite forze di massa;
- forze di superficie $\overline{\mathbf{F}}_s$: forze che vengono esercitate sul sistema attraverso la sua superficie di contorno.

Consideriamo una porzione infinitesima di superficie dA appartenente ad un volume di fluido. Su questa agisce una forza infinitesima (di superficie) $d\overline{\mathbf{F}}_s$. Si definisce **sforzo unitario**:

$$\lim_{dA \longrightarrow 0} \frac{d\overline{\mathbf{F}}_s}{dA} = \overline{\mathbf{\Phi}}_n$$

L'unità di misura dello sforzo è: $\overline{\mathbf{\Phi}}_n \rightarrow \frac{[M]\,[L]}{[t]^2} \cdot \frac{1}{[L]^2} \rightarrow \frac{[F]}{[L]^2} \rightarrow \frac{N}{\mathrm{m}^2}$. La spinta elementare su dA è, dunque, esprimibile come $d\overline{\mathbf{F}}_s = \overline{\mathbf{\Phi}}_n \, dA$. Si può, allora, calcolare la forza di superficie agente su una superficie finita A come

$$\overline{\mathbf{F}}_s = \int_A \overline{\mathbf{\Phi}}_n \, dA.$$

Rispetto alla giacitura di dA, di normale $\hat{\mathbf{n}}$, è possibile scomporre lo sforzo in una componente normale σ ed una tangenziale τ (Fig. 4).

La componente normale σ può essere di compressione o di trazione. Per convenzione, in Meccanica dei Fluidi, si assumono positivi gli sforzi normali di compressione, visto che la maggior parte dei fluidi in condizioni usuali non sopporta sforzi normali di trazione. La componente isotropa (che non dipende dall'orientamento della superficie) degli sforzi normali viene chiamata pressione (**Statica dei Fluidi**, Par. 1.1).

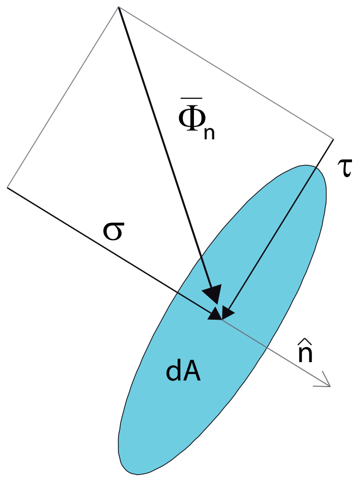


Figura 4: componente normale e tangenziale dello sforzo su dA.

2.3 Proprietà dei fluidi

Le proprietà dei fluidi possono essere **intensive** (non dipendono dalle dimensioni del sistema, e in particolare dal volume) o **estensive**, a seconda che dipendano o meno dalle dimensioni del sistema. Ad esempio, sono grandezze intensive la temperatura termodinamica, la densità e la viscosità, mentre la massa è una proprietà estensiva.

Densità

Si definisce densità ρ la massa per unità di volume:

$$\rho \rightarrow \frac{[M]}{[L]^3} \rightarrow \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Per l'acqua a temperatura ambiente, $\rho = 1000$ kg/m^3, mentre per l'aria a temperatura ambiente, $\rho = 1.29$ kg/m^3.

La densità è funzione di temperatura e pressione. La legge che lega queste tre grandezze è detta **equazione di stato** e, in generale, si esprime come

$$\rho = \rho(p, T).$$

In genere, la densità diminuisce con la temperatura e per un **liquido** varia poco con la pressione, mentre dipende molto dalla pressione nel caso dei **gas**. Caso particolare è l'acqua, per cui la massima densità viene raggiunta a 4°C.

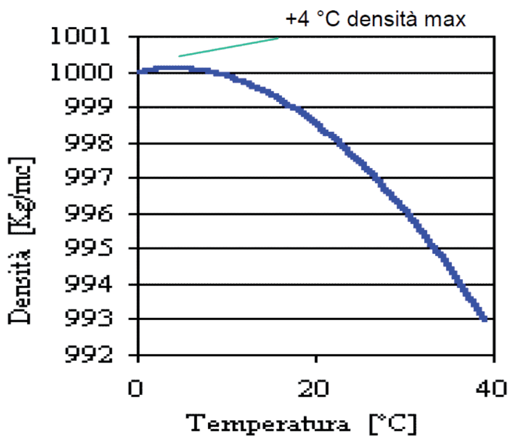


Figura 5: andamento della densità con la temperatura per l'acqua.

Per un **gas perfetto**, l'equazione di stato è data da

$$pW = nRT,$$

dove W è il volume, n il numero di moli contenuto nel volume, $R = 8.314472$ J/(mol K) la costante universale dei gas e T la temperatura espressa in gradi Kelvin. Il numero di moli è dato da $n = \dfrac{M}{M_{mol}}$ dove M è la massa contenuta nel volume e M_{mol} è la massa di una mole. Quindi, essendo $\rho = \dfrac{M}{W}$, l'equazione di stato dei gas perfetti risulta anche

$$\rho = \frac{pM_{mol}}{RT}.$$

Peso specifico

Si definisce peso specifico γ, il peso per unità di volume:

$$\gamma = \rho g \rightarrow \left[\frac{F}{L^3}\right] \rightarrow \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3},$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità. Per acqua e aria sulla Terra a temperatura ambiente, $\gamma = 9810$ N/m^3 e $\gamma = 12.68$ N/m^3, rispettivamente.

Comprimibilità

La comprimibilità è la proprietà di un fluido di modificare il proprio volume (e quindi la propria densità) al variare della pressione a cui è soggetto.

Consideriamo un fluido, soggetto ad una pressione p, che occupa un volume W (Fig. 6). In condizioni isoterme ($T = \text{cost}$), si osserva, sperimentalmente, una variazione di volume dW quando è applicata una variazione di pressione dp, secondo la legge:

$$\frac{dW}{W} = -\frac{dp}{\varepsilon}, \tag{1}$$

dove ε (in N/m^2) è il modulo di elasticità a compressione cubica.

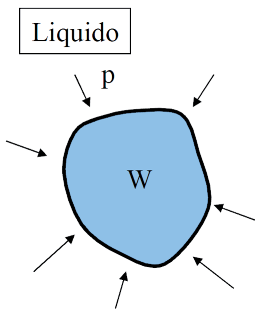


Figura 6: volume di fluido soggetto ad una pressione p.

La conservazione della massa implica che: $\rho W = \text{cost}$. Differenziando, si ottiene

$$\rho dW + W d\rho = 0 \implies \frac{dW}{W} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

da cui segue la relazione tra variazione di pressione e variazione di densità:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Integrando la relazione (2), si ottiene

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{p - p_0}{\varepsilon}\right),$$

dove ρ_0 rappresenta una densità di riferimento in corrispondenza della pressione di riferimento p_0.

Nei liquidi ε è molto grande, per cui la densità si mantiene circa costante al variare della pressione: ε elevato $\Longrightarrow d\rho \cong 0 \Longrightarrow \rho = \text{cost}$. Per esempio, il modulo di elasticità a compressione cubica dell'acqua a 10°C è pari a $\varepsilon_w(T = 10°\text{C}) = 2.003 \cdot 10^9\ \text{N/m}^2$.

I gas sono invece molto comprimibili; ε dipende dal loro stato e dal tipo di trasformazione che stanno subendo. Se consideriamo una trasformazione politropica di un gas perfetto, per cui vale la

$$pW^c = \text{cost},$$

dove c è l'indice della politropica, e differenziamo, otteniamo

$$W^c dp + pcW^{c-1} dW = 0.$$

Con questa e la (1):

$$W dp - pcW \frac{dp}{\varepsilon} = 0$$

e, quindi,

$$\varepsilon = cp.$$

Ad esempio, per l'aria a pressione atmosferica soggetta a trasformazioni isoterme ($c = 1$), $\varepsilon \cong 10^5\ \text{N/m}^2$.

Viscosità

La viscosità è una proprietà dei fluidi che lega gli sforzi tangenziali alle velocità di deformazione.

Consideriamo un fluido tra due lastre piane parallele poste a distanza Δy. La lastra superiore, di area A, viene messa in moto, ad una velocità V, da una forza orizzontale di modulo F. La lastra inferiore invece resta ferma. Se V è abbastanza piccola, il profilo di velocità che si sviluppa tra le due lastre è lineare e varia tra zero (in corrispondenza della lastra inferiore) e V (sulla lastra superiore). Tale configurazione prende il nome di **flusso piano di Couette** (Fig. 7). Per mantenere una differenza di velocità tra le due lastre, ΔV, costante (in questo caso $\Delta V = V - 0 = V$), nonostante l'attrito, è necessaria una forza F costante. Tale forza risulta sperimentalmente proporzionale alla differenza di velocità ΔV, alla superficie A ed inversamente proporzionale allo spessore Δy:

$$F \propto A \frac{\Delta V}{\Delta y}.$$

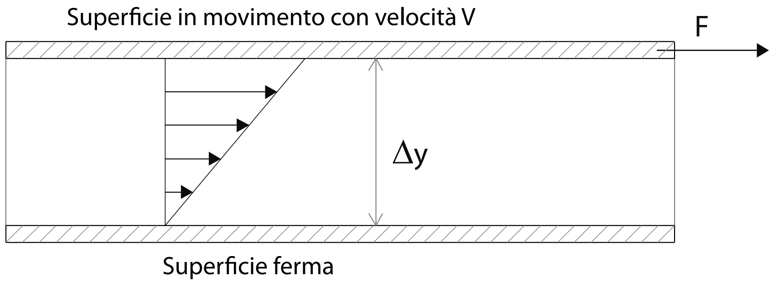


Figura 7: flusso piano di Couette.

La costante di proporzionalità nella relazione precedente è la **viscosità dinamica** μ (in Pa·s). Lo sforzo tangenziale risulta

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta V}{\Delta y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y},$$

dove y è la direzione normale al moto del fluido e u è la componente di velocità parallela alle lastre. La quantità $\frac{\partial u}{\partial y}$ è detta velocità di deformazione (per ragioni che chiariremo in uno dei prossimi capitoli). La viscosità è, dunque, una misura della resistenza che il fluido esercita rispetto a variazioni di forma.

In generale, la legge che lega sforzi tangenziali e velocità di deformazione è detta **equazione reologica**, e si esprime come

$$\tau = f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Per un **fluido Newtoniano**, la funzione f è lineare, passa per l'origine e non cambia nel tempo. Esistono altri tipi di fluidi per cui la f ha un diverso comportamento (**fluidi non-Newtoniani**). Per esempio, l'equazione reologica della pasta dentifricia è lineare, ma non passa per l'origine (c'è uno sforzo di soglia e si parla di **fluidi alla Bingham**). Se la funzione f non cambia nel tempo ma è più che lineare si parla di **fluidi dilatanti**; se non cambia nel tempo, ma è meno che lineare si parla di **fluidi pseudoplastici**. Se la funzione f è monotona crescente col tempo si parla di **fluidi reopettici**; se è monotona decrescente nel tempo si parla di **fluidi tissotropici**.

Il flusso piano di Couette, a causa del fatto che le due lastre piane devono essere di lunghezza infinita, non è fisicamente realizzabile. Uno strumento che si può utilizzare per determinare la viscosità (**reometro**) è costituito da due cilindri coassiali come quelli riportati in Fig. 8 (flusso rotante di Couette).

Il comportamento di μ è differente per gas e liquidi. Per i gas la viscosità aumenta all'aumentare della temperatura, per i liquidi invece, la viscosità diminuisce all'aumentare della temperatura. Per acqua e aria a temperatura ambiente, $\mu = 10^{-3}$ e 10^{-5} Pa·s, rispettivamente. Sembrerebbe, allora, che l'acqua opponga maggiore resistenza dell'aria rispetto all'essere deformata. In realtà, parte di questa resistenza è dovuta all'inerzia. Per depurare la viscosità degli effetti inerziali, si introduce la **viscosità cinematica**, $\nu = \mu/\rho$ (in m^2/s). Per acqua e aria a temperatura ambiente, $\nu = 10^{-6}$ e 10^{-5} m^2/s, rispettivamente. Come si vede, al netto dell'inerzia, è più difficile deformare l'aria che l'acqua.

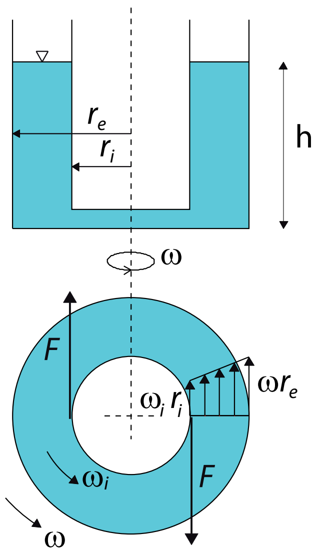


Figura 8: flusso rotante di Couette tra due cilindri coassiali.

Esercizio

Un olio lubrificante è posto tra due piatti piani paralleli. Un piatto è fisso, l'altro si muove con velocità $V = 3$ m/s. Data la distanza tra i due piatti $h = 2.6$ cm, determinare lo sforzo di taglio nel lubrificante, noto che $\mu_{\text{olio}} = 0.26$ Pa·s.

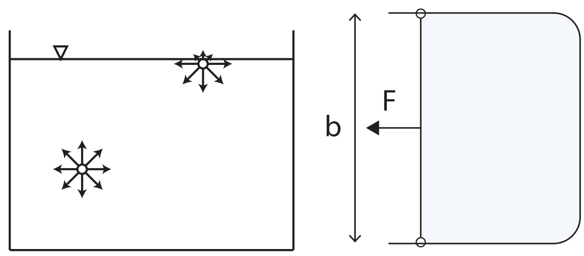
Soluzione:

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} = \mu \frac{V}{h} = 0.26 \cdot \frac{3}{0.026} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{m}} = 30 \text{ Pa}.$$

Tensione superficiale

Le superfici di separazione (interfaccia) tra sostanze non miscibili possiedono energie associate con esse perché lavoro deve essere fatto per generarle. L'energia per unità di area associata con tali superfici è detta **energia superficiale** ed ha come dimensioni J/m^2. La tendenza dei sistemi fisici a minimizzare l'energia ad essi associata fa sì che essi tendano a minimizzare anche le superfici di intefaccia.

Nel caso dei fluidi, si preferisce introdurre il concetto di **tensione superficiale** σ_T, che è la forza per unità di lunghezza, in N/m dunque, che si deve applicare tangenzialmente a una superficie di interfaccia per mantenerla in equilibrio. La ragione sta nel fatto che, in generale, una molecola è sottoposta ad azioni attrattive o repulsive da parte delle molecole che la circondano. Se consideriamo una molecola che si trova all'interfaccia tra due fluidi non miscibili (Fig. 9a), per esempio una molecola d'acqua all'interfaccia tra aria e acqua, essa subisce da un lato le azioni attrattive delle molecole d'acqua, e dall'altro quelle delle molecole d'aria. Poiché le forze esercitate dall'aria sono molto inferiori rispetto quelle esercitate dalle molecole d'acqua (la densità dell'aria, e di un gas in genere, è molto inferiore a quella dell'acqua, cioè ci sono molte meno molecole d'aria che di acqua a parità di volume), le forze di attrazione non sono simmetriche. Questo fa sì che la risultante delle forze sulla molecola sia rivolta verso la massa d'acqua e la molecola stessa tenda a "sfuggire" dall'interfaccia muovendosi verso l'interno della massa d'acqua, diminuendo la superficie di interfaccia. Per evitare che la superficie di interfaccia diminuisca occorre, dunque, mantenere in tensione la superficie stessa che si comporta, di conseguenza, come una membrana elastica. Vale la pena notare che energia superficiale e tensione superficiale sono due modi di descrivere lo stesso fenomeno e rappresentano la stessa proprietà fisica: è facile dimostrare che $J/m^2 = N/m$.



(a) (b)

Figura 9: (a) schema delle forze di attrazione su molecole di un liquido a contatto con un gas. (b) Pellicola di liquido sospesa all'interno di un telaio metallico ad U dotato di un lato mobile.

Esperimento: consideriamo una pellicola di liquido a contatto con un gas e sospesa all'interno di un telaio metallico ad U, con un lato mobile di lunghezza b (Fig. 9b). La pellicola di liquido tende a tirare il lato mobile verso l'interno per minimizzare l'area della sua superficie. Per mantenere fermo il filo, è necessario applicare una forza F nella direzione opposta. Quindi, la tensione superficiale σ_T risulta

$$\sigma_T = \frac{F}{2b}$$

(il fattore 2 a denominatore è dovuto al fatto che il liquido presenta due superfici a contatto con il gas).

Alcuni esempi di applicazione del concetto di tensione superficiale sono riportati nella dispensa degli Esercizi di Statica dei Fluidi.